

الاثنين 5/28/2018

تمارين حول الفصل الأول:

النظرية العامة للمعادلة التفاضلية  
الخطية من الرتبة  $n$ .

المثال الأول، أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 0$$

الحل: اعتقاداً على طرق التقييد:

$$(2x+1)m^2 + (4x-2)m - 8 = 0 \quad \text{نأخذ افتراضاً } y = e^{mx} \text{ حيث إذا كان:}$$

$$2xm^2 + m^2 + 4xm - 2m - 8 = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 + 2mx(m+2) = 0$$

$$(m+2)(m-4) + 2xm(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+2mx+4) = 0$$

$$\text{أولاً } m+2 = 0 \Rightarrow m = -2 \Rightarrow y = e^{-2x}$$

$$\text{ثانياً } m+2mx+4 = 0 \Rightarrow m(1+2x) = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{1+2x}$$

مرفوضاً لأنه يتعلق بـ  $x$ .

بناءً عليه فإن الحل العام يعطى من طريق التوصل إلى صيغة أويلر بالشكل:

$$y_h = y_1 \left[ c_1 \int \frac{e^{\int p(x) dx}}{y_1} dx + c_2 \right]$$

$$y'' + \frac{4x-2}{2x+1}y' - \frac{8}{2x+1}y = 0 \quad \text{نجد كتابة المعادلة بالشكل النموذجي}$$

$$\frac{-\int p(x) dx}{e} = \frac{-\int \frac{4x-2}{2x+1} dx}{e} = \frac{-\int \left(2 - \frac{4}{2x+1}\right) dx}{e}$$

$$= e^{-2x + 2 \ln(2x+1)}$$

$$= e^{-2x} (2x+1)^2$$



(2)

$$y_h = e^{-2x} \left( c_1 \int \frac{e^{2x} (2x+1)^2}{e^{4x}} dx + c_2 \right) \quad \text{نفرض من } x :$$

$$y_h = e^{-2x} \left( c_1 \int e^{2x} (2x+1)^2 dx + c_2 \right)$$

$$\int (4x^2 e^{2x} + 4x e^{2x} + e^{2x}) dx \quad \text{بالمعادلة التفاضلية بالمتغيرة}$$

فيكون الحل العام المطلوب.

\*\*

\*\*

\*\*

\*\*

السؤال الثاني :

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$(x \sin x + \cos x) y'' - x \cos x y' + \cos x y = x (x \sin x + \cos x)^2$$

الحل :

$$y = y_h + y_p$$

$y_h$  : حل عام للمعادلة

$y_p$  : حل خاص

- اعتماداً على طرق التفتيش :

نكون الحالة  $y = x$  حيث فاجأ للمعادلة المتجانسة المناظرة إذا فقط

$$p(x) + x p_1(x) = 0 \quad \text{إذا كان}$$

$$-x \cos x + x \cos x = 0 \Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow y_1 = x \quad \text{حل}$$

- نكون الحالة  $y = \cos x$  حيث للمعادلة التفاضلية إذا كان محلاً للمعادلة

$$y = \cos x \quad y' = -\sin x \quad y'' = -\cos x$$

$$\Rightarrow y_2 = \cos x \quad \text{حل}$$

بالتالي الحل العام للمعادلة المعطاة

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 = A_1 x + A_2 \cos x$$



إذا كان الامكان إيجاد الحل الخاص الأول والمتابعة وفقا ليعرفك أوستراوسكي  
المشكل :

$$y_1 = y_1 \left[ c_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$

$$-\int p(x) dx = \int \frac{x \cos x}{x \sin x + \cos x} dx = \ln |x \sin x + \cos x|$$

نلاحظ هنا أن البسط متساو المقام

$$y_h = x \left( c_1 \int \frac{x \sin x + \cos x}{x^2} dx + c_2 \right)$$

لنوجد قيمة التكامل :

$$\int \left( \frac{x \sin x}{x^2} + \frac{\cos x}{x^2} \right) dx$$

$$u = \cos x \Rightarrow \sin x = u'$$

$$\int u v' = uv - \int u' v$$

$$v' = \frac{1}{x^2} \rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}$$

$$y_h = x \left( c_1 \cdot \frac{\cos x}{x} + c_2 \right)$$

الخاص  $y_p$  :

$$W(\cos x, x) = \begin{vmatrix} \cos x & x \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix} = \cos x + x \sin x$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & x \\ x(x \sin x + \cos x) & & \end{vmatrix} = -x^2(x \sin x + \cos x)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & x(x \sin x + \cos x) \end{vmatrix} = x \cdot \cos x (x \sin x + \cos x).$$

$$y_p = c_1 \int \frac{w_1}{w} dx + c_2 \int \frac{w_2}{w} dx$$

$$y_p = \cos x \int -x^2 dx + x \int x \cos x dx$$

هنا التكامل  
يكامل بالتجزئة

$$y_p = -\cos x \cdot \frac{x^3}{3} + x \int x \cos x dx \rightarrow$$

\*\*\* \*\*

السؤال الثالث:

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x^4 - x^2) y'' + (2x^3 - 2x^2 - x) y' - y = \frac{1}{x}$$

إذا علمت أن  $y_1 = \frac{1}{x}$  فبدلاً من حل المعادلة المتجانسة المتفرقة

الحل:

$$y = y_h + y_p$$

$$y_h = \frac{1}{x} \left[ c_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1} dx + c_2 \right]$$

وملاحظة: يجب ملاحظة أن مثال أمثلة سابقة في  $y''$  بالواحد قبل اختيار  $p(x)$

$$\frac{-\int p(x) dx}{e} = \frac{-\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2(x-1)} dx}{e}$$

لنوجد قيمه التكامل:

$$\frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax + B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$$

لنبدأ أولاً:

نطابق فنجد أن:

$$B=1 \quad A=3 \quad C=-1$$

فيكون:



$$-\int \frac{3x+1}{x^2} dx + \int \frac{1}{x-1} dx = -3\ln x + \frac{1}{x} + \ln|x-1|$$

$$= e^{\ln \frac{x-1}{x^3} + \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$$

$$y_h = \frac{1}{x} \left[ c_1 \int (e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}) dx + c_2 \right]$$

لنوجد قيمة هذا التكامل:

$$\int (e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}) dx = \int e^{\frac{1}{x}} dx - \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} dx$$

نأخذ  $u = \frac{1}{x}$  ونكامل:  $-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$  جواب

فيكون الحل العام:  $A_1 e^{\frac{1}{x}} + A_2 \frac{1}{x}$

السؤال الرابع:

- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:  $(x+1)^2 y''' - 12y' = 0$

إذا علمت أن: للمعادلة نقطة حرجية:

$y_1 = 1$  and  $y_2 = \frac{1}{(1+x^2)}$

- ملاحظة: علمنا أننا لم نعط في السؤال الحلين:

فالمعادلة السابقة نقول إلى معادلة ~~ليجاندر~~ ليجاندر بعد تحويلها (امت)

الحل:  $y = y_1 \int u dx \Rightarrow y = \int u dx$

$y' = u \quad y'' = u' \quad y''' = u''$

نفرض في المعادلة السابقة فنجد أن:



(6)

$$(x+1)^2 u'' - 12u = 0 \quad (A)$$

لنفرض المعادلة على الشكل:

$$u_2 = \left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

$$u = u_2 \int v dx \quad u = \frac{-2}{(x+1)^3} \int v dx$$

$$u' = \frac{6}{(x+1)^4} \int v dx - \frac{2v}{(x+1)^3} \quad u'' = \frac{-24}{(x+1)^5} \int v dx + \frac{6v}{(x+1)^4} +$$

ننقص من المعادلة (A)

$$-\frac{2}{(x+1)^3} v' + \frac{6}{(x+1)^4} v$$

$$-\frac{2}{(x+1)} v' + \frac{12}{(x+1)^2} v - \frac{24}{(x+1)^3} \int v dx + \frac{24}{(x+1)^3} \int v dx = 0$$

$$\frac{-2}{(x+1)} v' + \frac{12}{(x+1)^2} v = 0 \Rightarrow \frac{v'}{v} = \frac{6}{x+1} \Rightarrow v = C(x+1)^6$$

$$u_3 = u_2 \int v dx \quad u_3 = \frac{-2}{(x+1)^3} \int (x+1)^6 dx$$

$$u_3 = \frac{-2}{(x+1)^3} \frac{(x+1)^7}{7} = -\frac{2}{7} (x+1)^4$$

$$y_3 = y_1 \int u_3 dx \Rightarrow y_3 = -\frac{2}{7} \int (x+1)^4 dx = -\frac{2}{35} (x+1)^5$$

$$y_h = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3$$

$$= A_1 + A_2 \frac{1}{(x+1)^2} + A_3 (x+1)^5$$

xx xx xx xx

السؤال الخامس:



5- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(x+3)y'' - (2x+7)y' + 2y = (x+3)^2 e^{2x}$$

نحلها بطريقة:  $y = e^{mx}$  حيث إذا كان:

$$(x+3)m^2 - (2x+7)m + 2 = 0$$

$$(xm)(m-2) + 3(m-\frac{1}{3})(m-2) = 0$$

$$(m-2)(xm + 3(m-\frac{1}{3})) = 0$$

$$m-2=0 \rightarrow m=2 \rightarrow e^{2x} \text{ حل}$$

$$2m+3m-1=0 \text{ مريض كونه نقطة } x \neq 0$$

$$y_h = e^{2x} \left( c_1 \int \frac{-\int \frac{2x+7}{x+3} dx}{e^{4x}} dx + c_2 \right) \text{ حل العام لا هذا}$$

$$\int \frac{2x+7}{x+3} dx = 2x + \ln(x+3)$$

$$y_h = e^{2x} \left( c_1 \int \frac{e^{2x}(x+3)}{e^{4x}} dx + c_2 \right)$$

$$y_h = e^{2x} \left( c_1 \int e^{-2x}(x+3) dx + c_2 \right)$$

نكامل بالتجزئة:

$$y_h = e^{2x} \left( c_1 \left( -(x+3) \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \right) + c_2 \right)$$

$$y_h = e^{2x} \left( -c_1 (x+3) e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{-2x} + c_2 \right)$$

$$y_h = -c_1 (x+3) - \frac{1}{4} + c_2 e^{2x} = c_0 (2x+7) + c_1 e^{2x}$$

$$y_h = c_0 (2x+7) + c_1 e^{2x} \text{ هو الحل العام}$$

$$y_1 = e^{2x} \quad y_2 = 2x+7 \quad \text{لا هذا الحل الخاص:}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{2n} & 2n+7 \\ 2e^{2n} & 2 \end{vmatrix} = 2e^{2n} - 2e^{2n}(2n+7)$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2n+7 \\ (x+3)e^{2n} & 2 \end{vmatrix} = -(x+3)(2n+7)e^{2n}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^{2n} & 0 \\ 2e^{2n} & (x+3)e^{2n} \end{vmatrix} = (x+3)e^{3n}$$

$$y = y_1 \int \frac{W_1}{W} dn + y_2 \int \frac{W_2}{W} dn$$

$$y = e^{2n} \int \frac{-(x+3)(2n+7)e^{2n}}{2e^{3n}(6-2n)} dn + (2n+7) \int \frac{(x+3)e^{3n}}{2e^{3n}(6-2n)} dn$$

با یادگیری این روش، مسائل پیچیده

\*\*\*

\*\*\*

\*\*\*